



Nome: \_\_\_\_\_

| Questão | 1  | 2  | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Total |
|---------|----|----|---|---|---|---|---|---|---|----|-------|
| Pontos  | 1½ | 3½ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1  | 13    |
| Nota    |    |    |   |   |   |   |   |   |   |    |       |

- Esta prova é composta por 10 questões. Certifique-se de que todas as questões estão legíveis. Preencha as informações requeridas no topo desta página e rubrique cada uma das folhas da prova, no alto à direita.

Boa prova!

## As questões 1 e 2 são de resolução obrigatória

1. Responda as questões abaixo.

- (1) (a) Enuncie e demonstre o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.
- (½) (b) Seja  $f$  uma função a valores reais Lebesgue integrável. Então segue que  $f^2$  é integrável?
2. Seja  $X = C[0, 1]$  o espaço de Banach das funções contínuas  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  com a norma  $\|f\| = \sup_{t \in [0, 1]} |f(t)|$ . Considere  $T: X \rightarrow X$  o operador linear dado por

$$(Tf)(t) = \int_0^t f(s) ds \text{ para } t \in [0, 1].$$

- (½) (a) Mostre que  $T$  é limitado e encontre  $\|T\|$ .
- (1) (b) Mostre que  $T$  é compacto e não possui autovalores.
- (1) (c) Mostre que  $T$  é injetor.
- (½) (d) Notando que  $R(T) = \{f \in C^1[0, 1]: f(0) = 0\}$ , encontre  $T^{-1}: R(T) \rightarrow X$ .
- (½) (e) Considerando em  $R(T)$  a norma induzida de  $X$ ,  $T^{-1}$  é ou não limitado?

*Sugestão: para a compacidade de  $T$ , utilize o Teorema de Arzelà-Ascoli.*

## Escolha agora 5 dentre as próximas 8 questões

- (1) 3. Dê um exemplo de um operador compacto  $T: H \rightarrow H$  não-nulo sobre um espaço de Hilbert  $H$  com espectro  $\sigma(T) = \{0\}$ . Mostre que um tal exemplo não existe se  $T$  é auto-adjunto.
- (1) 4. Mostre que num espaço normado  $X$  de dimensão finita, quaisquer duas normas são equivalentes.
- (1) 5. Enuncie, com todos os detalhes, o princípio da limitação uniforme. Use este princípio para mostrar que toda sequência  $(x_n)$  em um espaço normado  $X$  (sobre  $\mathbb{R}$ ) que é fracamente convergente é necessariamente limitada (em norma).

*Sugestão: considere a família de aplicações  $T_n: X' \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \mapsto f(x_n)$  e aplique o princípio da limitação uniforme.*

Sejam agora  $X, Y$  espaços normados e  $T: X \rightarrow Y$  um operador linear. Mostre que  $T$  é contínuo (em norma) se e somente se  $T$  é fracamente contínuo.

*Sugestão: use o fato anterior sobre limitação de seqüências fracamente convergentes.*

- (1) 6. Mostre que um subespaço  $Y \subset X$  é fechado (em norma) se e somente se  $Y$  é fracamente fechado. Explique os resultados que utilizou, enunciando teoremas caso necessário.

- (1) 7. Mostre que o espaço dual de  $c_0$  pode ser identificado canonicamente com  $l_1$ , ou seja, tem-se um isomorfismo de espaços de Banach  $c'_0 \cong l_1$ . Usando esta identificação, vamos munir  $l_1$  da topologia fraca\*. Mostre que a seqüência  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  consistindo dos elementos  $e_n \in l_1$  definidos por  $e_n(m) = \delta_{n,m}$  ("base canônica") converge fraco\* para zero. Considere agora o operador linear  $T: l_1 \rightarrow l_1$  definido por  $T(x_n) = (\sum_n x_n) e_1$ . Mostre que  $T$  é limitado mas não é fraco\*-fraco\* contínuo.

*Sugestão: use a seqüência  $(e_n)$ .*

- (1) 8. Suponha que  $T: H \rightarrow H$  é um operador compacto auto-adjunto sobre um espaço de Hilbert  $H$  de dimensão infinita. Mostre que se o espectro de  $T$  é finito então 0 é um autovalor de  $T$ .

- (1) 9. Prove que um operador  $T: H_1 \rightarrow H_2$  entre espaços de Hilbert  $H_1, H_2$  é compacto se e somente se  $T$  pode ser aproximado (em norma) por operadores de posto finito de  $H_1$  em  $H_2$ .

- (1) 10. Seja  $f: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função Lebesgue integrável e defina

$$g(x) = \int_x^1 \frac{f(t)}{t} dt, \quad x \in (0, 1).$$

Mostre que esta fórmula define uma função  $g: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  que é Lebesgue integrável e vale

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

*Sugestão: Aplique os teoremas de Tonelli/Fubini.*