

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

—
EXAME DE QUALIFICAÇÃO EM ANÁLISE - 05.03.15

Nome: _____

Assinatura: _____

- (1) Seja X um espaço vetorial com produto interno e $M = \{x_i : i \in I\}$ um conjunto ortonormal infinito em X . Prove que M é fechado e limitado, mas não é compacto.
- (2) Seja X um espaço vetorial normado e seja $\phi: X \rightarrow \mathbb{C}$ um funcional linear. Prove que ϕ é contínuo se e somente se $\ker(\phi) = \phi^{-1}(0)$ é fechado em X .
- (3) Mostre que se X é um espaço linear normado completo quando munido com as normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ e existe uma constante positiva $c > 0$ tal que $\|x\|_1 \leq c \|x\|_2$, $\forall x \in X$, então as normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são equivalentes.
- (4) Sejam X, Y espaços de Banach e (T_n) um sequência de operadores lineares e limitados $X \rightarrow Y$. Suponha que existe $c > 0$ tal que $\|T_n\| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e que $T_n(x)$ converge para todo x em um subconjunto denso $D \subseteq X$. Mostre que (T_n) converge pontualmente para um operador linear limitado $T: X \rightarrow Y$ com $\|T\| \leq c$.
- (5) Mostre que se X é um espaço linear normado, $z \in X$ e $f \in X'$, então $T: X \rightarrow X$ definido por $Tx = f(x)z$ é um operador linear compacto.
- (6) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $f \in L^1(\mu)$. Prove que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\int_E |f| d\mu < \epsilon$ sempre que $E \in \mathcal{M}$ e $\mu(E) < \delta$.
- (7) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida, onde $\mathcal{M}$ é uma σ -álgebra sobre X e $\mu: \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$ é uma medida sobre $\mathcal{M}$. Seja $g: X \rightarrow [0, \infty]$ uma função mensurável e para cada $E \in \mathcal{M}$, defina

$$\nu(E) := \int_X g \cdot \chi_E d\mu,$$

onde χ_E denote a função característica de E . Prove que ν define uma medida sobre $\mathcal{M}$ e se $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função mensurável, então

$$\int f d\nu = \int_X fg d\mu.$$