

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA

—
EXAME DE QUALIFICAÇÃO EM ANÁLISE - 15.04.15

Nome: _____
Assinatura: _____

Resolva 7 das 10 questões abaixo.

- (1) Seja X um espaço vetorial com uma base infinita enumerável. Mostre que existe uma norma $\|\cdot\|$ sobre X tal que $(X, \|\cdot\|)$ não é um espaço de Banach.
- (2) Seja M um subespaço fechado de um espaço vetorial normado X separável. Mostre que o espaço vetorial normado quociente X/M é separável.
- (3) Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado não trivial de dimensão finita e Y um espaço vetorial normado qualquer. Seja $T : X \rightarrow Y$ é linear. Mostre que existe $x_0 \in X$ com $\|x_0\| = 1$ tal que $\|T\| = \|T(x_0)\|$.
- (4) Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $T : X \rightarrow X$ linear. Supondo que X tem dimensão finita, mostre que $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ com $|\lambda| > \|T\|$, a aplicação $T - \lambda I : X \rightarrow X$ é um homeomorfismo linear.
- (5) Seja $T : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ definida por

$$Tx = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right),$$

onde $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$. Mostre que T é compacto.

- (6) Seja $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno. Sejam $(x_n : n \in \mathbb{N})$, $(y_n : n \in \mathbb{N})$ sequências de Cauchy em X . Prove que $(\langle x_n, y_n \rangle : n \in \mathbb{N})$ é uma sequência convergente.
- (7) Seja $S = \{v_k : k \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto infinito ortonormal de um espaço de Hilbert H . Prove que não existe um subespaço M de H para o qual $\text{span}(S) = M^{\perp\perp}$.
- (8) Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado. Mostre que $(X, \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach se e somente se toda série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ em X que é absolutamente somável é somável.
- (9) Seja $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 x^n f(x) dx = 0$.
- (10) Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida finito (i.e. $\mu(X) < \infty$). Seja (E_k) um sequência de subconjuntos mensuráveis de X tal que $\mu(E_k) > 1/100$ para todo k . Seja F o conjunto dos pontos $x \in X$ que pertencem à infinitos E_k . Mostre que F é mensurável e $\mu(F) \geq 1/100$.