



Florianópolis, 3 de agosto de 2016.
Universidade Federal de Santa Catarina
Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada
Exame de Qualificação para o Doutorado (Análise)

Nome: _____

Matrícula: _____

Questão:	1	2	3	4	5	6	7	Total
Pontos:	25	25	25	25	25	25	25	175
Nota:								

Instruções

- Esta prova é composta por 3 páginas e 7 questões. Certifique-se de que não há páginas faltando e preencha as informações requeridas no topo desta página. Coloque nome em todas as folhas de soluções e não utilize uma mesma folha para duas questões. A prova terá duração de 3 horas.
- Você deve fazer 4 das 7 questões. Entre as questões 1 e 2, você deve escolher uma, entre as questões 3, 4 e 5 você deve escolher duas e entre as questões 6 e 7 você deve escolher uma. Marque um X nos espaços em branco acima nas questões que você NÃO escolheu.

Bom exame!

1. [25 Pontos] Sejam $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R})$ o conjunto das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ contínuas e periódicas de período 2π e $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o conjunto das funções contínuas e limitadas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ equipado com a norma

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|; x \in \mathbb{R}\}.$$

(a) [5 Pontos] Mostre que $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R})$ está contido em $C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(b) [20 Pontos] Mostre que o conjunto das funções da forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

em que $n \in \mathbb{N}$ e $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, está contido e é denso em $\mathcal{P}_{2\pi}(\mathbb{R})$.

2. [25 Pontos] Seja (M, d) um espaço métrico compacto.

(a) [10 Pontos] Mostre que M é separável.

(b) [15 Pontos] Denote por $C(M, \mathbb{R})$ o espaço das funções contínuas de M em $\mathbb{R}$ equipado com a norma

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|; x \in M\}.$$

Mostre que $C(M, \mathbb{R})$ é separável.

Sugestão: Escolha $\{x_j\}$ um subconjunto enumerável denso em M e aplique o teorema de Stone-Weierstrass com a $\mathbb{Q}$ -álgebra gerada pelas funções g_j , em que $g_j(x) = d(x, x_j)$.

3. [25 Pontos] Sejam X e Y espaços vetoriais normados, denote por $B(X, Y)$ o conjunto dos operadores lineares e limitados de X em Y e seja $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $B(X, Y)$.

(a) [15 Pontos] (Princípio da Limitação Uniforme) Suponha que X seja um espaço de Banach e que, para cada $x \in X$, existe $C_x > 0$ tal que

$$\|T_n(x)\|_Y \leq C_x, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prove que existe $C > 0$ tal que

$$\|T_n\|_{B(X, Y)} \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sugestão: Use o teorema de categoria de Baire.

(b) [10 Pontos] Suponha que X e Y sejam espaços de Banach e que, para cada $x \in D$, $\{T_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge em Y , em que D é um conjunto denso em X . Assuma ainda que $\{T_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência limitada para cada $x \in X$. Mostre que, para todo $x \in X$, $\{T_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge e que o operador $T : X \rightarrow Y$ definido por

$$T(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n(x)$$

pertence a $B(X, Y)$.

4. [25 Pontos]

(a) [15 Pontos] Sejam X um espaço vetorial normado, Y um espaço de Banach e $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $B(X, Y)$ que converge (na norma de $B(X, Y)$) para $T \in B(X, Y)$. Mostre que se cada T_n é um operador compacto, então T é compacto.

(b) [10 Pontos] Seja

$$\begin{aligned} T : \ell^2 &\longrightarrow \ell^2 \\ (x_1, x_2, x_3, \dots) &\longmapsto \left(\frac{x_1}{2}, \frac{x_2}{2^2}, \frac{x_3}{2^3}, \dots \right). \end{aligned}$$

Mostre que T é um operador linear compacto.

5. [25 Pontos] Seja X um espaço vetorial normado.

(a) [15 Pontos] Seja Y um subespaço de X e suponha que existam $x_0 \in X$ e $\delta > 0$ tais que $\|y - x_0\|_X \geq \delta$ para todo $y \in Y$. Mostre que existe um funcional linear limitado f sobre X tal que $\|f\|_{B(X, \mathbb{R})} \leq 1$, $f(x_0) = \delta$ e $f(y) = 0$ para todo $y \in Y$.

(b) [10 Pontos] Mostre que se $x_0 \in X$ é tal que $|f(x_0)| \leq C$ para todo funcional linear limitado f sobre X , então $\|x_0\|_X \leq C$.

6. [25 Pontos] Nos itens abaixo, considere as integrais com a medida de Lebesgue.

(a) [12½ Pontos] Sejam $a > 0$ e $f \in L_1((0, a), \mathbb{R})$ e defina $g : (0, a) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g(x) = \int_x^a \frac{f(t)}{t} dt.$$

Mostre que $g \in L_1((0, a), \mathbb{R})$.

(b) [12½ Pontos] Seja $f \in L_1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tal que $\int_K f(t) dt = 0$ para todo $K \subset \mathbb{R}$ compacto.

Mostre que $f(x) = 0$ para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}$.

7. [25 Pontos] Sejam $(X, \mathcal{S}, \mu)$ um espaço de medida e $f, f_n : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ funções $\mathcal{S}$ -mensuráveis. Dizemos que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge em medida para f se, para todo $\epsilon > 0$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in X; |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) = 0.$$

(a) [5 Pontos] Mostre que convergência pontual não implica convergência em medida.

(b) [20 Pontos] Mostre que se $\mu(X) < \infty$, então convergência para quase todo ponto implica convergência em medida.