



Florianópolis, 11 de setembro de 2017.  
Universidade Federal de Santa Catarina  
Programa de Pós-graduação em Matemática Pura e Aplicada  
Prova de Qualificação de Doutorado de Análise (2017/02)

Nome: \_\_\_\_\_

Matrícula: \_\_\_\_\_

### Instruções

- Esta prova é composta por 2 páginas e 7 questões. Certifique-se de que não há páginas faltando. Preencha as informações requeridas no topo desta página e rubrique cada uma das folhas da prova, no alto à direita.
- A prova tem duração de 4 horas.
- Interpretação, compreensão e resolução das questões fazem parte da avaliação. Você deve exibir todos os cálculos e deduções que levaram à obtenção da resposta. Se você usar algum teorema, indique e explique como o teorema se aplica. Organize sua solução de modo coerente e coeso. Respostas não justificadas ou incorretamente justificadas não serão consideradas. Questões parcialmente corretas podem receber pontuação parcial.
- Escreva seu nome em cada folha e indique claramente qual questão está sendo resolvida.

**Boa prova!**

1. Sejam  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  espaço de medida tal que  $\mu(X) < \infty$  e  $(Y, d)$  um espaço métrico. Seja ainda  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada tal que para cada  $y \in Y$  a função

$$x \in X \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

é mensurável, e para cada  $x \in X$  a função

$$y \in Y \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

é contínua. Prove que a função  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$g(y) = \int_X f(x, y) d\mu(x)$$

está bem definida e é contínua.

2. Sejam  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  espaço de medida e  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  função mensurável. Prove que se

$$\int_A f(x) d\mu(x) = 0$$

para todo  $A \in \mathcal{M}$ , então o conjunto  $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$  é mensurável tem medida nula.

3. Sejam  $X$  espaço localmente compacto Hausdorff e  $C_0(X)$  o conjunto das funções contínuas de  $X$  em  $\mathbb{C}$  que se anulam no infinito com a norma do supremo. Mostre que  $C_c(X)$ , o conjunto das funções contínuas de  $X$  em  $\mathbb{C}$  de suporte compacto, é denso em  $C_0(X)$ .
4. Sejam  $X, Y$  espaços de Banach,  $\mathcal{L}(X, Y)$  o espaço dos operadores lineares limitados de  $X$  em  $Y$ ,  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}(X, Y)$  e  $A : X \rightarrow Y$  um operador linear. Prove que se  $A_n$  converge fortemente para  $A$ , então  $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ .
5. Seja  $H$  um espaço de Hilbert e seja  $T : H \rightarrow H$  um operador linear simétrico, isto é  $\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \forall x, y \in H$ . Prove que  $T$  é limitado.

6. Considere em  $\mathcal{L}(l^2)$ , os operadores:

$$R(x) = (0, x_1, x_2, \dots), \quad M(x) = \left( \frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \dots \right), \quad \forall x = (x_1, x_2, \dots) \in l^2.$$

Prove que  $M \circ R$  é um operador compacto que não tem autovalores.

7. Sejam  $(X, \mathcal{M}, \mu)$  espaço de medida e  $\phi : X \rightarrow X$  função mensurável, bijetora, com inversa mensurável, tais que  $\mu$  e  $\mu \circ \phi^{-1}$  são medidas equivalentes. Mostre que para  $f \in L^2(X, \mu)$ , temos que

$$U(f) = \sqrt{\frac{d\mu \circ \phi^{-1}}{d\mu}}(f \circ \phi^{-1})$$

é um elemento de  $L^2(X, \mu)$ , e que  $U : f \in L^2(X, \mu) \mapsto U(f) \in L^2(X, \mu)$  é um operador unitário.