

Resolva 4 das 6 questões abaixo.

1. Em que consiste a região de estabilidade absoluta de um método numérico para EDO? Indique dois métodos, um com região de estabilidade limitada e outro com região de estabilidade ilimitada, justificando suas respostas.

2. Considere a equação de advecção

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0,$$

com valor inicial $u(x, 0) = g(x)$. Formule o esquema upwind para este problema e analise sua estabilidade. Comente sobre a condição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL). Mostre que, neste caso, a condição CFL implica estabilidade.

3. Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Mostre que a pseudo-inversa de Moore-Penrose de A , denotada por $A^+ \in \mathbb{R}^{n \times m}$, é a matriz que minimiza $\|I - AX\|_F$.
4. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simétrica, com autovalores tais que $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_{n-1}| > |\lambda_n| > 0$. Descreva o método das potências e sua versão inversa-deslocada.
5. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ estritamente diagonalmente dominante por colunas. Considere o sistema linear $Ax = b$, y_0 uma aproximação inicial, e a iteração:

$$y_{k+1} = Py_k + b, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

onde $P = -(L + U)D^{-1}$ com $A = L + D + U$, onde $D = \text{diag}(A)$.

Mostre que a iteração está bem definida e que y_k converge a y_* , onde $y_* = Dx_*$ e x_* é solução de $Ax = b$.

6. Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica, definida positiva e $x_* \in \mathbb{R}^n$ solução do sistema linear $Ax = b$.

Método de direções conjugadas

Dado $\{d_0, d_1, \dots, d_{n-1}\}$ um conjunto de direções A -conjugadas e $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Faça $r_0 = Ax_0 - b$.

Repita para $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{-r_k^T d_k}{d_k^T A d_k}, \\ x_{k+1} &= x_k + \alpha_k d_k, \\ r_{k+1} &= r_k + \alpha_k A d_k. \end{aligned}$$

a) Mostre que no método de direções conjugadas: $r_k^T d_i = 0$, para $i = 0, 1, \dots, k-1$.

b) Prove que x_k é solução do problema

$$\begin{aligned} \min_x \quad & \|x - x_*\|_A \\ \text{s.a} \quad & x - x_0 \in \text{span}\{d_0, d_1, \dots, d_{k-1}\}. \end{aligned}$$