

Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada
Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas

Nome:

Assinatura:

Exame de Qualificação - EDP

Q1- (25 pontos) Sejam $f \in C_0^2(\mathbb{R}^3)$, $g \in C_0^1(\mathbb{R}^3)$ e $u(x, t)$ uma solução de

$$u_{tt} - \Delta u + u^3 + \alpha u_t = 0, \quad \text{em } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$$

$$u(\cdot, 0) = f(\cdot) \text{ em } \mathbb{R}^3,$$

$$u_t(\cdot, 0) = g(\cdot) \text{ em } \mathbb{R}^3,$$

com

$$C_0^m(\mathbb{R}^3) = \{f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} : f \in C^m, \text{ supp } (f) \text{ compacto}\}.$$

Prove a propriedade de velocidade finita de propagação, isto é, que $u(x, t) = 0$ se $|x| \geq t + R$, onde $R > 0$ é tal que $\text{supp } (f) \subset B(0, R)$ e $\text{supp } (g) \subset B(0, R)$. $B(0, R)$ denota a bola aberta em $\mathbb{R}^3$ com centro na origem e raio R .

Q2- (a) (5 pontos) Seja α uma constante positiva. Use que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|y|^2} dy = \pi^{n/2}$$

para mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\alpha|y|^2 - i y \cdot x} dy = (2\pi)^{n/2} \frac{1}{(2\alpha)^{n/2}} e^{-|x|^2/(4\alpha)}.$$

(b) (15 pontos) Seja $f \in C(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ uma função dada. Obtenha uma representação explícita para a solução (para $t > 0$) de

$$u_t - \Delta u = f(x, t) \quad \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$$

$$u(\cdot, 0) = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^n.$$

(c) (5 pontos) Mostre que a solução obtida atende o dado inicial, ou seja, que $u(t) \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0^+$.

Q3- (25 pontos) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ domínio limitado e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ uma função que satisfaz $\Delta u \geq 0$ em Ω . Prove que

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

Q4- Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto com $0 \in D$. Seja $f \in C(D; \mathbb{R}^n)$ com $f(0) = 0$ e suponha que existe uma função $V \in C^1(D; \mathbb{R})$ tal que $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ para $x \neq 0$ e seja

$$\dot{V} := (\text{grad } V(x), f(x))_{\mathbb{R}^n}, \quad \forall x \in D.$$

(a) (**10 pontos**) Mostre que se $\dot{V} \leq 0$, então a solução nula de

$$\frac{du}{dt} = f(u(t))$$

é estável.

(b) (**5 pontos**) Indique que condição adicional devemos impor para que a solução nula seja assintoticamente estável.

(c) (**5 pontos**) Indique que condição adicional devemos impor para que a solução nula seja exponencialmente estável.

(d) (**5 pontos**) Apresente uma aplicação de algum desses resultados.