

Universidade Federal de Santa Catarina
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas
Pós-Graduação em Matemática Pura e Aplicada

EXAME DE QUALIFICAÇÃO - EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

25 DE AGOSTO DE 2016

Nome: _____

Assinatura: _____

Questão 1. (25 pontos) Encontre a solução do problema de Dirichlet numa faixa semi-infinita

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & 0 < x < 2, y > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < 2, \\ u(0, y) = 0, \quad u(2, y) = 0, & y > 0, \end{cases}$$

com

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Questão 2. Considere o problema misto

$$\begin{cases} u_t = k \Delta u + q(x, t) & \text{em } \Omega \times (0, \infty) \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \bar{\Omega} \end{cases} \quad (1)$$

onde $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ é não vazio, aberto e limitado, $k > 0$ é uma constante, $f \in C(\bar{\Omega})$ é nula em $\partial\Omega$ e $q \in C(\mathcal{R})$ e é limitada em $\mathcal{R} = \bar{\Omega} \times [0, \infty)$ e é nula em $\partial\mathcal{R}$.

(a) (15 pontos) Suponha $n = 1$ e $\Omega = (0, a)$. Obtenha a solução $u = u(x, t)$ em série do problema (1).

(b) (10 pontos) Prove que a série obtida em (a) converge uniformemente em $\mathcal{R}$ e conclua que $u \in C(\mathcal{R})$.

(c) (15 pontos) Suponha $n = 2$ e $\Omega = (0, a) \times (0, b)$. Prove que o problema (1) possui no máximo uma solução $u \in C^2(\Omega \times (0, \infty)) \cap C(\bar{\mathcal{R}})$.

Questão 3. Seja A uma matriz real $n \times n$ com todos os autovalores reais e negativos.

(a) (10 pontos) Prove que existem constantes positivas M e ω tais que

$$\|e^{tA}\| \leq M e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Notação: $\|B\| = \sum_{i,j=1}^n |b_{ij}|$, se $B = (b_{ij})$ é uma matriz $n \times n$.

(b) (10 pontos) Considere a equação diferencial linear de ordem n com coeficientes constantes

$$u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} u' + a_n u = 0, \quad t \in \mathbf{R}. \quad (2)$$

Use a parte (a) para provar que se a equação característica de (2) tem somente raízes reais e negativas então $\lim_{t \rightarrow \infty} u^{(j)}(t) = 0$, $j = 0, 1, \dots, n-1$, qualquer que seja a solução $u(t)$ de (2).

(c) (15 pontos) Considere agora o sistema linear não homogêneo

$$\begin{cases} x' = Ax + g(t), & t > 0 \\ x(0) = \eta, \end{cases} \quad (3)$$

onde $\eta \in \mathbf{R}^n$ e $g(t) = \text{col}(g_1(t), \dots, g_n(t))$ é contínua e limitada em $[0, \infty)$. Prove que a solução de (3) é limitada em $[0, \infty)$.