

UFSC-DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
EXAME DE QUALIFICAÇÃO—EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Semestre 2016.2, 03/10/2016

Profs. Jardel Moraes Pereira e Miguel A. Alejo

Questão 1. (Valor 2.5) Obtenha a solução do problema seguinte

$$\begin{cases} u_t = ku_{xx} + e^{-t}, & 0 < x < L, \quad t > 0, \quad k \in \mathbb{R} \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(L, t) = 0, & \text{para } t > 0, \\ u(x, 0) = e^{-x}, & 0 < x < L. \end{cases}$$

Questão 2. (Valor 2.5) Sejam $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $g \in C^1(\mathbb{R})$ e α uma constante real. Prove que o problema

$$\begin{cases} u \in C^2(\mathbb{R}^2) \\ u_{tt} = u_{xx} + \alpha(u_t + u_x), & (x, t) \in \mathbb{R}^2 \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

possui uma única solução (Sugestão: usar características).

Questão 3. (Valor 2.5) Encontre a solução $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ do problema de Dirichlet seguinte no disco unitário

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, & \text{em } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = f, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

com

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}, \quad \partial\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}.$$

Questão 4. (Valor 2.5) Sejam $A(t) = (a_{i,j}(t))$ uma matriz $n \times n$, sendo $a_{i,j} : I \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas, $\forall i, j = 1, \dots, n$ e $g(t) = \text{col}(g_1(t), \dots, g_n(t))$, com $g_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas, onde $I = [0, b]$. Considere o problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} x' = A(t)x + g(t) \\ x(0) = \eta, \end{cases}$$

com $\eta \in \mathbb{R}^n$. Prove que o PVI (0.1) possui uma solução definida em I .