

Exame de Qualificação para o Doutorado - Geometria

Professores Responsáveis: Martin Weilandt e Ivan P. Costa e Silva

Atenção: Você deve fornecer a devida justificativa para cada resposta que der, e pode utilizar sem demonstrar todos os resultados vistos em seu curso de Variedades Diferenciáveis (além de eventuais resultados básicos de Análise), com exceção daqueles que estiverem sendo explicitamente pedidos.

1) Denotemos por M_n o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas reais. Considere a matriz diagonal $\eta = \text{diag}[\underbrace{1 \cdots 1}_{p \text{ vezes}} \underbrace{-1 \cdots -1}_{q \text{ vezes}}]$ em M_n , com $0 \leq p, q \leq n$ e $p + q = n$. Seja

$$O(p, q) := \{A \in M_n \mid A^t \eta A = \eta\}.$$

- a) Prove que $O(p, q)$ é um grupo de Lie, e determine sua dimensão.
- b) Obtenha a álgebra de Lie de $O(n) := O(n, 0)$.

2) Enuncie o Teorema de Stokes para variedades com bordo, e o Teorema da Divergência de Gauss em $\mathbb{R}^3$. Em seguida, use o primeiro para provar o segundo. (*Sugestão:* use a forma diferencial $\omega = F^1 dy \wedge dz + F^2 dz \wedge dx + F^3 dx \wedge dy$, onde F^1, F^2, F^3 são funções apropriadas.)

3) Considere os conjuntos

$$M = \{(x, y); x^2 + 2y^2 = 3\} \text{ e } N = \{(x, y); 3x^2 + y^2 = 4\}.$$

- a) Mostre que M e N são subvariedades (mergulhadas) de $\mathbb{R}^2$.
- b) Mostre que M e N são transversais.

4) Para cada $p = (x, y, z) \in M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \neq 0 \text{ ou } z \neq 0\}$, definamos o conjunto

$$\mathcal{D}_p = \left\{ (2sz - tx) \frac{\partial}{\partial x} + (-s - 2ty) \frac{\partial}{\partial y} + tz \frac{\partial}{\partial z}; s, t \in \mathbb{R} \right\}.$$

- a) Mostre que $\mathcal{D} := \bigcup_{p \in M} \mathcal{D}_p$ é uma distribuição suave de posto 2 em M .
- b) Mostre que $\mathcal{D}$ é integrável.

“Mathematical discoveries, small or great, are never born of spontaneous generation. They always presuppose a soil seeded with preliminary knowledge and well prepared by labour, both conscious and subconscious.”

J.H. Poincaré (1854-1912), matemático francês.