



Universidade Federal de Santa Catarina

Centro de Ciências Físicas e Matemáticas - Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática e Matemática Aplicada

Professores: Juliano B. Francisco e Clóvis C. Gonzaga

Primeiro Exame de Qualificação

Área: Otimização

Data: 4/3/2014

Horário: 14:00 às 17:00 hrs

Nome: _____

Assinatura: _____

Instruções:

- Coloque nome em todas as folhas.
- A prova possui 04 questões.
- A prova é individual e sem consulta.
- Respostas sem apresentar o desenvolvimento do raciocínio serão desconsideradas.

- 1) Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função quadrática convexa (isto é, sua Hessiana é simétrica definida positiva). Tome $\hat{x}, \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ e considere

$$M(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T(x - \bar{x}) + \frac{\sigma}{2}\|x - \bar{x}\|^2, \text{ em que } \sigma = \frac{(\nabla f(\bar{x}) - \nabla f(\hat{x}))^T(\bar{x} - \hat{x})}{\|\bar{x} - \hat{x}\|^2}.$$

Mostre que $M(x) = f(x)$ para todo $x \in S = \{x = \bar{x} + t(\bar{x} - \hat{x}) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Também, sendo $x_{\min}$ o minimizador de f em S , mostre que $|f(\bar{x}) - f(x_{\min})| \leq \frac{1}{2\sigma}\|\nabla f(\bar{x})\|^2$. (Dica: calcule o minimizador global de M .)

- 2) Seja $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$ e considere a sequência $\{x_k\}$ gerada pelo método Newton aplicado ao problema de minimizar $f(x)$, sujeito a $x \in \mathbb{R}^n$. Suponha que $\{x_k\}$ converge para um mínimo local de f . Sem assumir que $\nabla^2 f$ é Lipschitz contínua, mostre que sob certas condições a convergência é superlinear.
- 3) Mostre que, sob certas condições, o método de programação quadrática sequencial (SQP) aplicado ao problema de minimização com restrições de igualdade tem convergência localmente quadrática. (Dica: use a convergência quadrática do método de Newton.)
- 4) Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ (convexa), $h_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $g_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, p$), todas de classe C^2 . Suponha que cada h_i é uma função linear e cada g_j é uma função convexa. Mostre que todo ponto satisfazendo as condições KKT de

$$\begin{aligned} \min \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad & h(x) = 0 \text{ e } g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

é minimizador global.

BOM TRABALHO!