

Resolva 4 das questões abaixo.

1. Sejam $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções continuamente diferenciáveis. Considere o problema de minimizar $f(x)$ sujeito a $h(x) = 0$ e seja x_* um minimizador local deste problema. Prove que, ou existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(x_*) = \lambda \nabla h(x_*)$, ou então $\nabla h(x_*) = 0$.
2. Considere o problema geral de otimização não-linear:

$$\begin{aligned} \min_x \quad & f(x) \\ \text{s.a.} \quad & h(x) = 0, \\ & g(x) \leq 0, \end{aligned}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^1$ e convexa, $h_i(x) = a_i^T x - b_i$, para $i = 1, \dots, m$ e $g_j(x) \leq 0$ convexa e de classe $\mathcal{C}^1$ para $j = 1, \dots, p$. Mostre que todo ponto viável satisfazendo as condições de Karush-Kuhn-Tucker é minimizador global do problema.

3. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, continuamente diferenciável, e suponha que existe $L > 0$ tal que $\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq L\|x - y\|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(a) Mostre que $f(y) \leq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x) + \frac{L}{2}\|y - x\|^2$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(b) Seja $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e considere a sequência gerada por $x_{k+1} = x_k - \frac{1}{\sigma_k} \nabla f(x_k)$. Supondo que $\sigma_k \geq L$, para todo $k \geq 0$, mostre que $f(x_{k+1}) \leq f(x_k)$, para todo $k \geq 0$.

(c) Mostre que se o conjunto de nível $L_0 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \leq f(x_0)\}$ é limitado, então a sequência $\{x_k\}$ admite pelo menos um ponto de acumulação.

(d) Assumindo que $\{\sigma_k\}$ é limitada, mostre que todo ponto de acumulação da sequência $\{x_k\}$ é estacionário de f em $\mathbb{R}^n$.

4. Considere o problema de minimizar $f(x)$ em $\mathbb{R}^n$. Seja $\{x_k\}$ uma sequência gerada pelo método de Newton: $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$, onde $d_k = -\nabla^2 f(x_k)^{-1} \nabla f(x_k)$, com busca linear satisfazendo a condição de Armijo. Se $\{x_k\}$ está bem-definida e converge a um ponto x_* que satisfaz as condições suficientes de 2ª ordem, mostre que existe um $k_0 > 0$ tal que para todo $k > k_0$:

$$f(x_k + d_k) \leq f(x_k) + \gamma \nabla f(x_k)^T d_k,$$

com $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$.

5. Seja $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço de Hilbert. Seja $K \subset X$ um conjunto compacto e convexo. Seja $x_0 \in X$. Prove que se $x_0 \notin K$, então existe um hiperplano $H = \{x \in X \mid \langle a, x \rangle = b\}$, com $a \in X$ e $b \in \mathbb{R}$ que separa, x_0 de K , i.e., $\langle a, x_0 \rangle < b$ e $\langle a, x \rangle \geq b$, $\forall x \in K$. Além disso, seja $y \in K$, e z a projeção ortogonal de x_0 sobre H . Mostre que $\|y - z\| < \|y - x_0\|$.
6. Enuncie e prove os lemas fraco e forte da dualidade em programação linear.